

**Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике**

9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

9.1. В течение 100 дней каждый из шести друзей посетил бассейн ровно 75 раз, не более одного раза в день. Обозначим за n количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них. Определить максимальное и минимальное возможные значения числа n .

Ответ. 90 и 25 соответственно.

Решение. Общее число посещений бассейна за 100 дней шестью друзьями равно $75 \cdot 6 = 450$, следовательно, количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти

из них не больше $\frac{450}{5} = 90$. С другой стороны, если количество таких дней равно n , то

общее число посещений друзьями бассейна, равное 450, не превосходит $6n + 4(100 - n) = 400 + 2n$, откуда $n \geq 25$.

Осталось привести примеры, когда эти значения достигаются. Для этого запишем их фамилии по порядку: первый, второй,..., шестой, и так 45 раз подряд. Затем сначала поделим их на 90 пятёрок, идущих подряд, эти пятёрки посетят бассейн в первые 90 дней. В оставшиеся 10 дней в этом примере в бассейн не пойдёт никто.

Во втором случае в первые 25 дней в бассейн сходят первые 25 шестёрок последовательных друзей, а в оставшиеся 75 дней – 75 оставшихся последовательных четвёрок.

Критерии оценивания. (●) Оценки $n \geq 25$ и $n \leq 90$ - по 2 балла каждая, (●) примеры для $n = 25$ и $n = 90$ по 1 баллу за каждый. (●) Если сделано всё: 7 баллов.

9.2. Вася поменял местами цифры трехзначного числа A так, что ни одна цифра нового трехзначного числа B не совпала с цифрой числа A , стоящей в том же разряде. Оказалось, что разность $A - B$ - двузначное число, являющееся полным квадратом. Чему может быть равно число A ? Найдите все возможные варианты.

Ответ. Всего 20 решений: $A = 218,329$, $A = 213,...,879$, $A = 706,817,928$, $A = 201,312,...,978$.

Решение. Обозначим $A = \overline{abc}$, где a, b, c - цифры его сотен, десятков и единиц соответственно. Из принципа Дирихле и условия следует, что все они различны, так как нельзя рассадить минимум 4 кроликов (две пары одинаковых цифр в A и B) по 3 клеткам (разрядам), чтобы каждому досталось отдельное жильё. По условию либо $B = \overline{bca}$, либо $B = \overline{cab}$.

Кроме того, разность A и B двузначна, следовательно первая цифра A больше первой цифры B на 1 (как мы заметили, первые цифры этих чисел не могут быть равны).

Рассмотрим оба случая.

1) $B = \overline{bca}$. Тогда $A - B = \overline{abc} - \overline{bca} = 99a - 90b - 9c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $11a - 10b - c = 4$ и $a = b + 1$, то $b + 7 = c$, откуда $b = 1, 2$ и $A = 218, 329$ - два решения. Во втором случае $11a - 10b - c = 9$ и $a = b + 1$, значит $b + 2 = c$, откуда $b = 1, 2, ..., 7$ и $A = 213, ..., 879$ - семь решений.

2) $B = \overline{cab}$. Тогда $A - B = \overline{abc} - \overline{cab} = 90a + 9b - 99c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $10a + b - 11c = 4$ и $a = c + 1$, тогда $c = b + 6, a = b + 7$, откуда $b = 0, 1, 2$ и $A = 706, 817, 928$ - три решения. Во втором случае $10a + b - 11c = 9$ и $a = c + 1$, значит $c = b + 1, a = b + 2$, откуда $b = 0, 1, 2, ..., 7$ и $A = 201, 312, ..., 978$ - восемь решений. Общее число решений равно $2 + 7 + 3 + 8 = 20$.

Критерии оценивания. (●) Рассмотрен полностью только один из случаев для разности 36 или 81: 3 балла. (●) Не рассмотрена часть решений в одном из этих случаев: снимаем 1 балл в каждом случае.

9.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки K и M соответственно. Докажите что, если угол AMK больше угла BМК, то угол СКМ меньше угла ВКМ.

Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков AM и СК за Р. Заметим, что в треугольнике РМК сумма величин углов AMK и СКМ равна 180 минус величину КРМ, что равно 180 минус величину APC, и равно сумме величин углов PAC и PCA в треугольнике PAC. Величины PAC и PCA соответственно меньше величин углов BAC и BCA исходного треугольника ABC. Следовательно, сумма величин углов AMK и СКМ меньше 180 минус величину ABC. Последняя разность равна сумме углов ВКМ и ВМК в треугольнике ВМК. Значит, сумма величин углов AMK и СКМ меньше суммы величин углов ВКМ и ВМК. Если бы и величина СКМ была не меньше величины ВКМ, то по условию, сумма AMK и СКМ была бы больше суммы ВКМ и ВМК – противоречие.

Критерии оценивания. (●)

9.4. У Викентия есть две банки, красная и синяя, а также кучка из 20 камешков. Изначально обе банки пусты. Ход в игре Викентия состоит в том, чтобы переложить камешек из кучки в одну из банок или вернуть камешек из одной из банок в кучку. Количество камешков в банках определяет позицию игры. После каждого хода число камешков в красной банке всегда не меньше числа камешков в синей банке; и в ходе игры ни одна позиция не может повториться. Какое максимальное количество ходов может сделать Викентий?

Ответ. 110.

Решение. Позиция в игре Викентия однозначно задаётся парой неотрицательных целых чисел (x, y) , и $x + y \leq 20$, где $0 \leq y \leq x \leq 20$ - числа камешков в синей и красной банках соответственно. Всего в игре Викентия возможна $21+19+17+\dots+1=121$ позиция. Назовём позицию *чётной*, если сумма её чисел камешков в банках чётна, и *нечётной* – в противоположном случае. Всего в игре $11+10+\dots+1=66$ чётных позиций и $121-66=55$ нечётных. Каждый ход в игре меняет чётность позиции, поэтому всего игра не может содержать более, чем 55 чётных и 56 нечётных позиций (с учётом того, что начинается она с чётной позиции $(0,0)$), всего 111 позиций. и состоять из не более, чем $111-1=110$ ходов.

Приведём пример игры, когда Викентий сможет сделать 110 ходов. При этом он делает единственно возможный первый ход с $(0,0)$ на $(1,0)$, затем все позиции (x, y) с нечётным $x = 1, 3, 5, \dots, 9$ проходит последовательно от $(x, 0)$ до (x, x) , после чего переходит к $(x+1, x)$, а все позиции с чётным $x = 2, 4, \dots, 10$ проходит последовательно от $(x, x-1)$ до $(x, 0)$, после чего переходит к $(x+1, 0)$. После всего указанного он оказывается в позиции $(11, 0)$, после чего его стратегия слегка меняется. все позиции (x, y) с нечётным $x = 11, 13, 15, \dots, 17$ проходит последовательно от $(x, 0)$ до $(x, 19-x)$, после чего переходит к $(x+1, 19-x)$, а все позиции с чётным $x = 12, 14, \dots, 18$ проходит последовательно от $(x, 20-x)$ до $(x, 0)$, после чего переходит к $(x+1, 0)$. В итоге он оказывается в позиции $(19, 0)$ и совершает последний ход в $(20, 0)$. Не пройденными остались позиции $(2, 2), (4, 4), \dots, (10, 10), (11, 9), (13, 7), \dots, (19, 1)$ – ровно 10 штук, то есть пройденными в точности $121-10=111$ позиций. Совершено как раз 110 ходов.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что число ходов не больше 110: 3 балла. (●) Построение примера на 110 ходов с точным обоснованием: 4 балла. (●) Отсутствие точного обоснования примера: минус 2 балла.

9.5. Может ли в некоторой компании у каждого быть ровно 5 друзей, а у каждых двух – ровно 2 общих друга?

Ответ. Нет, не может.

Решение. Пусть A - один из членов этой компании, у него 5 друзей. У каждого члена компании, кроме A , есть два общих друга, являющимися двумя из пяти друзей A . Допустим, что пары общих друзей у A и B , а также у A и C совпадают, обозначим их за D и E . Тогда у D и E не меньше трёх общих друзей, среди которых как минимум A , B и C . что противоречит условию. Следовательно всего в компании, кроме A , людей не может быть больше, чем количество различных пар среди пяти друзей A , то есть не больше десяти. С другой стороны, для каждой такой пары X и Y у них есть ровно два общих друга, один из которых A , а другой Z , отличный от A . По условию, этот Z для разных пар X и Y тоже разный. Значит, всего в компании, кроме A , людей не может быть меньше, чем количество различных пар среди пяти друзей A , то есть не меньше десяти. Следовательно, всего в компании 11 человек. Тогда общее число дружб в компании равно $\frac{11 \cdot 5}{2}$ - число нецелое. Полученное противоречие доказывает, что приведённая в условии ситуация невозможна.

Критерии оценивания. (●) Доказательство, что число людей в компании не больше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не меньше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не может равняться 11: 1 балл.